

Aufgabe 4.1 Lösen Sie die Gleichungen

a) $(2x + 1)^2 = 4(x + 1)^2$,

e) $x^4 - 6x^2 = 7$,

b) $x^2 - 12x + 6 = 0$,

f) $x - 2\sqrt{x} = 3$,

c) $x^2 - 13x - 7 = 0$,

d) $2x^2 - 12x + 9 = 0$,

g) $\sqrt{x}(1 + \sqrt{x}) = 1 - \sqrt{x}$.

Aufgabe 4.2 Begründen Sie, warum die folgenden Gleichungen jeweils einen Kreis beschreiben.

a) $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0$,

b) $x^2 + y^2 - 8x + 16y = 0$.

Bestimmen Sie den Mittelpunkt und den Radius des jeweiligen Kreises sowie die Schnittpunkte der beiden Kreise.

Aufgabe[#] 4.3 Bestimmen Sie die Tangentialebene an die Kugel $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 4\sqrt{2}z = 0$ durch den Punkt $(0, 0, 0)$.

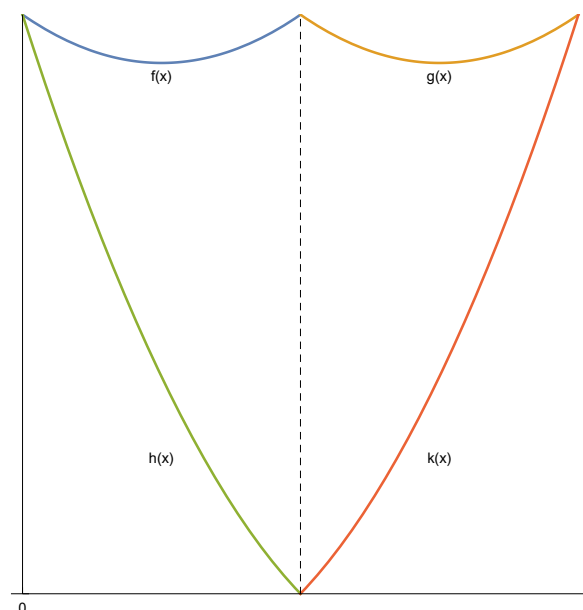
Aufgabe 4.4 Skizzieren Sie die Graphen folgender quadratischen Funktionen und bestimmen Sie jeweils den Scheitelpunkt:

a) $y = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{7}{8}$, b) $y = 3x^2 - \frac{9x}{2} + \frac{27}{16}$.

Aufgabe[#] 4.5 Eine Designerin entwirft eine Gedenktafel. Dafür benutzt sie quadratische Funktionen. Sie wählt

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 3, \quad h(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{9}{4}x + 3.$$

Helfen Sie der Designerin die Funktionsvorschriften für $g(x)$ und $k(x)$ zu bestimmen. Dabei ist bekannt, dass die Tafel symmetrisch ist.



Aufgabe 4.6 Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender Ungleichungen:

$$\text{a) } 2(x+1)(x-2) < 2x^2 + 5, \quad \text{b) } \frac{x-1}{2x+1} < 1, \quad \text{c) } \frac{1-2x}{x+1} < -1.$$

Aufgabe 4.7 Es seien die Punkte $A(3, 2)$ und $B(-1, 0)$ gegeben. Geben Sie die Gleichung des Kreises an, deren Punkte $P(x, y)$ die folgende Eigenschaft erfüllen: Der Abstand von P zu A ist dreimal so groß, wie der Abstand von P zu B .

Bestimmen Sie den Mittelpunkt und Radius dieses Kreises.

Aufgabe[#] 4.8 Bestimmen Sie den Radius des größten Kreises, der die Parabel $y = ax^2$, $a > 0$, im Ursprung berührt und über ihr liegt.

Ellipsen und Hyperbeln sind weitere Linien, die neben Kreise und Parabeln durch quadratische Gleichungen der Form

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

beschrieben werden können. So kann die Gleichung einer Ellipse in die kanonische Form

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

und die Gleichung einer Hyperbel in die kanonische Form

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \quad \text{oder} \quad -\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

mit quadratischen Ergänzung gebracht werden.

Aufgabe 4.9 Bringen Sie die Gleichung $4x^2 + 9y^2 + 32x - 54y + 109 = 0$ in die kanonische Form und skizzieren Sie die Linie.

Aufgabe[#] 4.10 Es seien der Punkt $A(1, 0)$ und die Gerade ℓ mit der Gleichung $x = 2$ gegeben. Geben Sie die Gleichung der Linie an, deren Punkte $P(x, y)$ die folgende Eigenschaft erfüllen:

- a) Der Abstand von P zu A ist gleich dem Abstand von P zu ℓ .
- b) Der Abstand von P zu ℓ ist doppelt so groß, wie der Abstand von P zu A .
- c) Der Abstand von P zu A ist doppelt so groß, wie der Abstand von P zu ℓ .

Um welche Linie handelt es sich jeweils?